关于一类完整逆半群*

朱 雯 何明星**
西华大学数学与计算机学院，成都 610039

摘要 引入了树半格，完整逆半群，齐次 Clifford 半群，Clifford 核等概念．给出了树半格上的齐次 Clifford 半群的一个结构定理，证明了在同构意义下，树半格上的齐次 Clifford 半群是且仅是树半格上完整逆半群的 Clifford 核．

关键词 完整逆半群 齐次 **Clifford** 半群 **Clifford** 核

从一个已知半群出发借助某种方法作扩张，从而构造新的半群，这是半群理论的重要课题．Munn 方法就是从一个半格出发构造逆半群[1]．虽然 Munn 方法对于逆半群的研究意义重大，但仍有缺陷．一般来说，由半格 E 得到的 Munn 半群 T 比起一般的幂等元半格为 E 的逆半群 S 要“瘦”得多，这是因为 T 的每一个 类的元素仅限于子半格 Ee 到 Ff 的同构，因此要比 S 的相对应的 类的元素少．从另一个角度来看更说明问题．我们知道，Munn 半群 T 上的最大幂等元分离同余是平凡的，因而它的核只是“干巴巴”的 E 本身．而一般的以 E 为幂等元半格的逆半群的最大幂等元分离同余的核（称为 C-核）是一个以 E 为幂等元半格的 Clifford 半群．正是因为这个 Clifford 半群使得 S 的每一个 类比 T 的相应 类的元素多．出于这样的事实，使我们考虑到，为了得到半格 E 上的逆半群，可以不从 E 出发，而是从一个以 E 为幂等元半格的 Clifford 半群 C 出发．这样就提出一个问题：对于任意的 Clifford 半群 C，能不能构造一个逆半群 S 使得：（i）S 是完整的，（ii）S 的 C-核和 C 同构？这里完整的定义将在本文中介绍．

在本文中，我们证明了：当 C 是齐次的 Clifford 半群时，满足上述条件的逆半群是可以构造出来的．由于这方面的工作还没有见到相关的研究报道，所以我们工作是走第一步．虽然我们的工作距离终点还很远，但这个问题很重要也很有趣味，所以我们想用自己的工作引起同行们的注意．

1 树半格

定义 1.1 设 E 是半格[2]，称 E 是树半格（简称树），如果：（i）E 有最小元；（ii）对于任意 $a, b\in E$ 当 $b< a$ 时，存在唯一的一组元素 $x_i\in E$ 使得 $b=x_0$，$a=x_n$，x_i 覆盖 x_{i-1}（$i=1, 2, \cdots, n$）．称 $b=x_0, x_1, \cdots, x_n=a$ 为 b 到 a 的覆盖链．

引理 1.1 设 E 是树，$a\in E(a\neq 0)$．则存在唯一的元素 $b\in E$ 被 a 覆盖．

证 设 $0=x_0, x_1, \cdots, x_n=a$ 是 0 到 a 的覆盖链，则 x_{n-1} 被 a 覆盖．若 $c\in E$ 被 a 覆盖，令 $0=y_0, y_1, \cdots, y_m=c$ 是 0 到 c 的覆盖链，则 $0=y_0, y_1, \cdots, y_m=c, a$ 是 0 到 a 的覆盖链，由唯一性，可知 $c=x_{n-1}$．

定义 1.2 设 E 是树，$a\in E(a\neq 0)$，$a_0=a$．则 a_1 是被 a 覆盖的唯一元素．若 $a_i\neq 0$，则记 $a_{i+1}=(a_i)_1$（被 a_i 覆盖的唯一元素）．

引理 1.2 设 E 是树，$a\in E(a\neq 0)$．那么（i）存在唯一的正整数 n 使 $a_n=0$．称 n 为 a 的高，记为 $h(a)$，且令 $h(0)=0$．（ii）若 $h(a)=n$，则 $h(a_i)=n-i$．（iii）若 $b< a$，则有 k 使 $b=a_k$．（iv）若 $b\neq a$，

2008-07-22 收稿，2008-09-19 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目（批准号：60773035）
** 通信作者，E-mail：wenzhu55@yahoo.com.cn，he_mingxing64@yahoo.com.cn

$h(a)=h(b)$，$ab=a_i$，则 $ab=b_i$.

证 (i) 设 $0=x_0$，x_1，…，$x_n=a$ 是0到 a 的覆盖链，则 $a_1=x_{n-1}$，$a_2=x_{n-2}$，…，$a_{n-1}=x_1$，$a_n=x_0=0$. (ii) 由 (i) 可知 $a_i=x_{n-i}$，因为 $0=x_0$，x_1，…，$x_{n-i}=a_i$ 是0到 a_i 的覆盖链，因此 $h(a_i)=n-i$. (iii) 因为 $b<a$，则有 b 到 a 的覆盖链 $b=y_0$，y_1，…，$y_k=a$，因而 $y_{k-1}=a_1$，…，$y_0=a_k$. (iv) 因为 $h(ab)=h(a_i)=h(a)-i=h(b)-i$，且 $ab<b$，所以 $ab=b_i$. 半格 E 上的 Munn 半群 T_E 的元素是所有 Ea 到 Eb 的同构 $(a, b\in E)$[1]. 设 α 是 Ea 到 Eb 的同构，β 是 Ec 到 Ef 的同构，则 $\alpha\beta$ 是 Ee 到 Ef 的同构，其中 $e=(bc)\alpha^{-1}$，$f=(bc)\beta$.

定理1.3 设 E 是树. 那么 (i) Ea 和 Eb 同构当且仅当 $h(a)=h(b)$，此时 Ea 到 Eb 的同构映射只有一个，记为 (a, b)；(ii) 若 $\alpha=(a,b)$，$\beta=(c,d)$，令 $bc=b_i=c_j$，则 $\alpha\beta=(a_i, d_j)$.

证 (i) 由引理1.2可知，$Ea=\{0=a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a\}$ $(n=h(a))$，$Eb=\{0=b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b\}$ $(m=h(b))$，若 Ea 和 Eb 同构，则 $n=m$，即 $h(a)=h(b)$. 反之，若 $h(a)=h(b)$，令 $\alpha: a_i\to b_i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，显然 α 是 Ea 到 Eb 的唯一同构. (ii) 若 $\alpha=(a,b)$，$\beta=(c,d)$，则 $\alpha\beta=(e,f)$，其中 $e=(bc)\alpha^{-1}$，$f=(bc)\beta$，因为 $bc=b_i=c_j$，所以 $e=(bc)\alpha^{-1}=(b_i)\alpha^{-1}=a_i$，$f=(bc)\beta=(c_j)\beta=d_j$.

定义1.3 设 E 是树. 那么 (i) $E0$ 的恒等自同构记为0 (显然0是 T_E 的零元)；(ii) 设 $\alpha=(a,b)\in T_E$，称 $h(a)(=h(b))$ 为 α 的高，记为 $h(\alpha)$.

定理1.4 设 E 是树，α，$\beta\in T_E$. 若 $\alpha=(a,b)$，$\beta=(c,d)$，则 (i) α $\beta\Leftrightarrow a=c$；(ii) α $\beta\Leftrightarrow b=d$；(iii) α $\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$；(iv) α $\beta\Leftrightarrow h(\alpha)=h(\beta)$.

证 (i) 在逆半群 T_E 中，α $\beta\Leftrightarrow\alpha\alpha^{-1}=\beta\beta^{-1}$，因为 $\alpha=(a, b)$，所以 $\alpha\alpha^{-1}$ 是 Ea 的恒等自同构 (记为 1_a). 同理，$\beta\beta^{-1}=1_c$. 因此 α $\beta\Leftrightarrow 1_a=1_c\Leftrightarrow a=c$. (ii) 因为 $\alpha^{-1}\alpha=1_b$，$\beta^{-1}\beta=1_d$，所以在 T_E 中 α $\beta\Leftrightarrow 1_b=1_d\Leftrightarrow b=d$. (iii) α $\beta\Leftrightarrow\alpha$ β 且 α $\beta\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d\Leftrightarrow\alpha=\beta$. (iv) 设 α β，则有 $\gamma\in T_E$ 使 α γ 且 γ β. 令 $\gamma=(e, f)$，则 $a=e$，$f=d$. 因此 $h(a)=h(e)=h(f)=h(d)$，故 $h(\alpha)=h(\beta)$. 反之，若 $h(\alpha)=h(\beta)$，则 $h(a)=h(d)$，令 $\gamma=(a, d)$，则 α β 且 γ β，因此 α β.

2 完整逆半群

若 E 是逆半群 (Clifford 半群) S 的幂等元半格，则称 S 是 E 上逆半群 (Clifford 半群)[3].

定义2.1 E 上逆半群 S 称为完整的，如果有 S 上幂等元分离同余 ρ 使 $S/\rho\cong T_E$.

引理2.1 在定义2.1中的同余 ρ 必是最大幂等元分离同余 μ[4].

证 设 $a\mu b$，则在商半群 S/ρ 中 $(a\rho)\mu(b\rho)$. 因为 $S/\rho\cong T_E$ 是基本逆半群，所以 $a\rho=b\rho$，因此 $a\rho b$. 这就表明 $\mu\subseteq\rho$. 因为 μ 是最大的，所以 $\rho=\mu$.

引理2.2 设 E 是有限的，若 S 上同余 ρ 使 $S/\rho\cong T_E$，则 S 是完整的.

证 设 $e\in E$，则 $e\rho$ 是 T_E 的幂等元. 根据 Lallemet 引理[5]，T_E 的幂等元必是 E 的元素的象，因此存在 E 到 T_E 的幂等元半格 E_1 的满射. 因为 E 是有限集，且和 E_1 的元素个数相同，所以该映射是一一映射. 设 e，$f\in E$，若 $e\rho=f\rho$，则 $e=f$. 因此 ρ 是幂等元分离同余.

引理2.3 设 S 是 E 上完整逆半群，$S/\rho\cong T_E$. 若 R 是 S 的 类，$R\rho=\{a\rho \mid a\in R\}$ 是 T_E 的 类.

证 显然 $R\rho$ 必在 T_E 的 类 R_1 中. 设 $a_1\in R_1$，则有 $a\in S$ 使 $a\rho=a_1$. 令 $f\in E\cap R_a$，则在 T_E 中 $(f\rho)$ $(a\rho)$. 令 $e\in E\cap R$，则 $e\rho\in R_1$. 因而幂等元 $e\rho$ 及 $f\rho$ 同时在 R_1 中，因此 $e\rho=f\rho$. 因为 ρ 是幂等元分离同余，故 $e=f$. 因为 f a，所以 e a，因此 $a\in R$. 这就证明了 $R\rho=R_1$.

定理2.4 设 S 是 E 上完整逆半群，$S/\rho\cong T_E$. 若 H，D 各是 S 的 类和 类，则 $H\rho$，$D\rho$ 各是 T_E 的 类和 类.

3 逆半群的 Clifford 核

引理3.1 设 S 是半格 E 上逆半群，$C_s=\{x\in S \mid (\forall e\in E)xe=ex\}$. 则 (i) $C_s=\ker\mu=\{x\in S \mid (\exists e\in E)x\mu e\}$；(ii) C_s 是 E 上 Clifford 半群.

证 结论 (i) 是已知的[2]. (ii) 由于 S 是逆半群，所以 S 上同余的核必是逆子半群且包含 E. 当 $x\in C_s$ 时有 $ex=xe(\forall e\in E)$，因此 C_s 是 Clifford 半群.

定义3.1 若 S 是 E 上逆半群，则称 C_s 为 S 的

Clifford 核（简称为 C—核）.

已知 Clifford 半群 C_s 是群的强半格，因此，对于每一个 $e\in E$ 对应子群 G_e；若 $e\geqslant f$，则有 G_e 到 G_f 的同态 φ_{ef}，记 $C_s=[E, G_e, \varphi_{ef}]$.

定理 3.2 设 S 是 E 上完整逆半群. 那么（i）$G_e=H_e\cap C_s$；（ii）若 Ee 和 Ef 同构，则 G_e 和 G_f 同构.

证 （i）子群 G_e 的单位元是 e，因为 e 所在类 H_e 是 e 为单位元的最大子群，因而 $G_e\subseteq H_e$，故 $G_e\subseteq H_e\cap C_s$. 设 $f\neq e$，则 $H_e\cap H_f=\Phi$. 因此 $G_e\subseteq H_e\cap C_s$.（ii）设 α 是 Ee 到 Ef 的同构，则 $\alpha\alpha^{-1}=1_e$，$\alpha^{-1}\alpha=1_f$. 因此 1_e，1_f 在 T_E 的同一个 类中. 根据定理 2.4，H_e 和 H_f 在 S 的同一个 类中，因此存在 $a\in \mathbb{R}_e\cap L_f$. 根据 Green 引理，映射 θ_a：$x\rightarrow a^{-1}xa$ 是 H_e 到 H_f 的同构，$\theta_{a^{-1}}$：$y\rightarrow aya^{-1}$ 是 H_f 到 H_e 的同构，θ_a 和 $\theta_{a^{-1}}$ 互逆. 设 $x\in G_e$，则 $x\in \mathbb{C}_s$，因而 $x\mu g$（$g\in E$），因此 $a^{-1}xa\mu a^{-1}ga$. 因为 $a^{-1}ga\in E$，所以 $a^{-1}xa\in \mathbb{C}_s$，因此 $x\theta_a\in G_f$. 这就证明了 $G_e\theta_a\subseteq H_f\cap C_s=G_f$. 同理可证 $G_f\theta_{a^{-1}}\subseteq H_e\cap C_s=G_e$，因此 G_e 和 G_f 同构.

引理 3.3 设 S 是 E 上完整逆半群，$a\in \mathbb{R}_e\cap L_f$，$\alpha$ 是 Ee 到 Ef 的同构. 若 $g\leqslant e$，$g\alpha=h$，则 $ah\in \mathbb{R}_g\cap L_h$.

证 设 φ 是 S 到 $S/\rho=T_E$ 的自然同态，因为 $a\in \mathbb{R}\cap L_f$，所以 $a\varphi\in \mathbb{R}_{1_e}\cap L_{1_f}$. 因此 $\alpha=a\varphi$ 是 Ee 到 Ef 的同构. 因为 $g\leqslant e$，所以 $h=g\alpha\leqslant f$. 因此 $(fh)\alpha^{-1}=h\alpha^{-1}=g$，$(fh)1_h=h$. 因而 $(ah)\varphi=(a\varphi)(h\varphi)=\alpha 1_h$ 是 Eg 到 Eh 的同构，因此 $\alpha 1_h=R_{1_g}\cap L_{1_h}$. 根据定理 2.4，$ah\in \mathbb{R}_g\cap L_h$.

Clifford 半群 $C_s=[E, G_e, \varphi_{ef}]$ 的结构同态 φ_{ef}（$e\geqslant f$）将 G_e 的元素 x 对应 $x\varphi_{ef}=xf$. 设 $a\in \mathbb{R}_e\cap L_f$，$a_1=ah\in \mathbb{R}_g\cap L_h$（引理 3.3），则 θ_a 是 G_e 到 G_f 的同构，θ_{a_1} 是 G_g 到 G_h 的同构. 设 $x\in G_e$，因为 $g\leqslant e$，则 $x\varphi_{eg}=xg$，因而 $x(\varphi_{eg}\theta_{a_1})=a_1^{-1}xga_1=h^{-1}a^{-1}xgah$. 由于 $xg\in G_g$，因而 $a^{-1}xga\in \mathbb{C}_s$. 因为 $h^{-1}=h\in E$，故 $h^{-1}a^{-1}xgah=a^{-1}xgah$. 又因为 $ah\in \mathbb{R}_g$，因而 $gah=ah$. 因而 $x(\varphi_{eg}\theta_{a_1})=a^{-1}xah=(x\theta_a)h=(x\theta_a)\varphi_{fh}$. 这就证明了 $\theta_a\varphi_{fh}=\varphi_{eg}\theta_{a_1}$.

定理 3.4 设 S 是 E 上完整逆半群，$C_s=[E, G_e, \varphi_{ef}]$. 若 $a\in \mathbb{R}_e\cap L_f$，$g\leqslant e$，$h=g\alpha$（$\alpha$ 是 Ee 到 Ef 的同构），$a_1=ah$，θ_a：$x\rightarrow a^{-1}xa$ 是 G_e 到 G_f 的同构，$\theta_{a^{-1}}$：$y\rightarrow aya^{-1}$ 是 G_g 到 G_h 的同构，则有 $\theta_a\varphi_{fh}=\varphi_{eg}\theta_{a_1}$.

4 树 E 上齐次 Clifford 半群的构造

定义 4.1 设 E 是树，$C=[E, G_e, \varphi_{ef}]$ 是 E 上 Clifford 半群. 称 C 是齐次的，如果：（i）若 Ee 和 Ef 同构，则 G_e 和 G_f 同构；（ii）设 α 是 Ee 到 Ef 的同构，$g\leqslant e$，$h=g\alpha$，则存在 G_e 到 G_f 的同构 θ，G_g 到 G_h 的同构 θ_1，使得 $\theta\varphi_{fh}=\varphi_{eg}\theta_1$.

根据定理 3.4，有以下结论.

定理 4.1 设 S 是树 E 上完整逆半群. 则 C_s 是 E 上齐次 Clifford 半群.

定理 4.2 设 E 是树，$E_i=\{a\in E\mid h(a)=i\}$. 若对于每一个 E_i 有群 G_i，当 $i>0$ 时，有 G_i 到 G_{i-1} 的同态 φ_i；记 $C_i=E_i\times G_i=\{(a, g)\mid a\in E_i, g\in G_i\}$，$C=\bigcup\limits_{i\geqslant 0}C_i$，$\varphi_{ii}$ 是 G_i 的恒等自同构，当 $i>j$ 时，记 $\varphi_{ij}=\varphi_i\varphi_{i-1}\cdots\varphi_{j+1}$. 则 C 在如下运算下是 E 上齐次 Clifford 半群：若 $x=(a, g)\in \mathbb{C}_i$，$y=(b, h)\in \mathbb{C}_j$，$ab\in E_k$，则定义 $xy=(ab, (g\varphi_{ik})(h\varphi_{jk}))$.

证 （1）设 $x=(a, g)\in \mathbb{C}_i$，$y=(b, h)\in \mathbb{C}_j$，$z=(c, m)\in \mathbb{C}_k$，若 $ab\in E_s$，$bc\in E_t$，$abc\in E_p$，则 $xy=(ab, (g\varphi_{is})(h\varphi_{js}))$，$yz=(bc, (h\varphi_{jt})(m\varphi_{kt}))$，于是有

$$(xy)z=(abc, ((g\varphi_{is})(h\varphi_{js}))\varphi_{sp}(m\varphi_{kp})),$$

$$x(yz)=(abc, (g\varphi_{ip})((h\varphi_{jt})(m\varphi_{kt}))\varphi_{tp}),$$

因为 $\varphi_{is}\varphi_{sp}=\varphi_{ip}$，$\varphi_{js}\varphi_{sp}=\varphi_{jp}$，$\varphi_{jt}\varphi_{tp}=\varphi_{jp}$，$\varphi_{kt}\varphi_{tp}=\varphi_{kp}$，故 $(xy)z=x(yz)$）. 因此运算适合结合律，故 C 是半群.

（2）设 $a\in E_i$，令 $G_a=\{(a, g)\mid g\in G_i\}$. 因为 $(a, g)(a, h)=(a, (g\varphi_{ii})(h\varphi_{ii}))=(a, gh)$，以及 $(a, g)(a, g^{-1})=(a, e_i)=(a, g^{-1})(a, g)$，所以 G_a 是以 (a, e_i) 为单位元的群，其中 e_i 是 G_i 的单位元. 设 a，$b\in E$，$a\geqslant b$，则 $a\in E_i$，$b\in E_j$，$i\geqslant j$. 令 φ_{ab} 将 G_a 的元素 (a, g) 对应 G_b 的元素 $(b, g\varphi_{ij})$，显然 φ_{ab} 是同态. φ_{aa} 是 G_a 的恒等自同构. 设 $a\geqslant b\geqslant c$，$(a\in E_i, b\in E_j, c\in E_k)$，则 $(a, g)(\varphi_{ab}, \varphi_{bc})=(a, g(\varphi_{ij}, \varphi_{jk}))=(a, g\varphi_{ik})=(a, g)\varphi_{ac}$，因此 $\varphi_{ab}\varphi_{bc}=\varphi_{ac}$. 因此 C 是群 G_a（$a\in E$）的强半格，$C=[E, G_a, \varphi_{ab}]$.

（3）设 a，$b\in E_i$. 由于 $(a, g)\rightarrow g$ 是 G_a 到 G_i

的同构，$(b,g)\to g$ 是 G_b 到 G_i 的同构，所以 $(a,g)\to(b,g)$ 是 G_a 到 G_b 的同构，记为 θ_{ab}．其次，设 $e,f\in E_i$，α 是 Ee 到 Ef 的同构，$g\leqslant e$，$h=g\alpha\leqslant f$．设 $g,h\in E_j$，需要证明同构 θ_{ef}：$G_e\to G_f$ 及 θ_{gh}：$G_g\to G_h$ 以及结构同态 θ_{eg}：$G_e\to G_g$ 及 φ_{fh}：$G_f\to G_h$ 满足 $\varphi_{eg}\theta_{gh}=\theta_{ef}\varphi_{fh}$．设 $(e,x)\in G_e$，则 $(e,x)\varphi_{eg}\theta_{gh}=(g,x\varphi_{ij})\theta_{gh}=(h,x\varphi_{ij})$，$(e,x)\varphi_{eh}\theta_{fh}=(f,x)\varphi_{fh}=(h,x\varphi_{ij})$．因此 $\varphi_{eg}\theta_{gh}=\theta_{ef}\varphi_{fh}$．因此 C 是 E 上齐次 Clifford 半群．

定义 4.2　由定理 4.2 所得的半群 C 记为 $[E,G_i,\varphi_i]$．

定理 4.3　设 $C=[E,G_e,\varphi_{ef}]$ 是 E 上齐次 Clifford 半群，则 C 必同构于 $[E,G_i,\varphi_i]$．

证　设 $E_i=\{a\in E\mid h(a)=i\}$，若 $e,f\in E_i$，则由定理 1.3 知 Ee 和 Ef 同构．根据齐次条件，有 G_e 到 G_f 的同构 θ_{ef} 使得 $\theta_e\varphi_{fh}=\varphi_{eg}\varphi_{gh}$，其中 $g\leqslant e$，$h=ga$（α 是 Ee 到 Ef 的同构），θ_{gh} 是 G_g 到 G_h 的同构，φ_{eg}：$G_e\to G_g$ 及 φ_{fh}：$G_f\to G_h$ 是 C 的结构同态．由于当 e，$f\in E_i$ 时 G_e 和 G_f 都同构，因此 E_i 确定一个群 G_i．设 θ_e：$G_e\to G_i$ 是同构．任取 $e\in E_i(i>0)$，g 是被 e 覆盖的元素，因此 $g<e$，$g\in E_{i-1}$，θ_g：$G_g\to G_{i-1}$ 是同构．令 $\varphi_i=\theta_e^{-1}\varphi_{eg}\theta_g$，则 φ_i 是 G_i 到 G_{i-1} 的同态．以下证明 φ_i 和 e 的选择无关．设 $f\in E_i$，$h<f$，$h\in E_{i-1}$，则 $\theta_f=\theta_{ef}^{-1}\theta_e$ 是 G_f 到 G_i 的同构，$\theta_h=\theta_{gh}^{-1}\theta_g$ 是 G_h 到 G_{i-1} 的同构．因此 $\theta_f^{-1}\varphi_{fh}\theta_h=\theta_e^{-1}\varphi_{eg}\theta_{gh}\theta_{gh}^{-1}\theta_g=\theta_e^{-1}\varphi_{eg}\theta_g$．这就证明了 φ_i：$G_i\to G_{i-1}$ 和 e 的选择无关．

根据 E，G_i，φ_i 可由定理 4.2 得到 E 上齐次 Clifford 半群 $\overline{C}=[E,G_i,\varphi_i]$，余下的工作是证明 $\overline{C}$ 和 C 同构．

在 $\overline{C}$ 中，当 $i>j$ 时，$\varphi_{ij}=\varphi_i\varphi_{i-1}\cdots\varphi_{j+1}$，先证明：若 $e\in E_i$，$h\in E_j$，$(h\leqslant e)$，则 $\theta_e\varphi_{ij}=\varphi_{eh}\theta_h$．为此设 $h=e_{i-k}$，…，e_1，$e_0=e$ 是 h 到 e 的覆盖链，则 $\varphi_i=\theta_e^{-1}\varphi_{e,e_1}\theta_{e_1}$，$\varphi_{i-1}=\theta_{e_1}^{-1}\varphi_{e_1,e_2}\theta_{e_2}$，…，故 $\varphi_{ij}=\theta_e^{-1}(\varphi_{e,e_1}\varphi_{e_1,e_2}\cdots)\theta_h^{-1}=\theta_e^{-1}\varphi_{eh}\theta_h$，因此 $\theta_e\varphi_{ij}=\varphi_{eh}\theta_h$．

设 $e\in E_i$，根据 G_e 到 G_i 的同构 θ_e，于是得到 C 到 $\overline{C}$ 的一一映射 φ：$x\to(e,x\theta_e)(x\in G_e)$．设 $x\in G_e$，$y\in G_f$，$e\in E_i$，$f\in E_j$，$h=ef$，$h\in E_k$．因为 $xy=(x\varphi_{eh})(y\varphi_{fh})\in G_h$，所以 $(xy)\varphi=(h,(x\varphi_{eh})(y\varphi_{fh})\theta_h)=(h,(x\varphi_{eh}\theta_h)(y\varphi_{fh}\theta_h))$．另一方面，因为 $x\varphi\to(e,x\theta_e)$，$y\varphi\to(f,y\theta_f)$，因此 $(x\varphi)(y\varphi)=(e,x\theta_e)(f,y\theta_f)=(h,(x\theta_e)\varphi_{ik}(y\theta_f)\varphi_{jk})$．由于 $\theta_e\varphi_{ik}=\varphi_{eh}\theta_h$，$\theta_f\varphi_{jk}=\varphi_{fh}\theta_h$，所以 $(xy)\varphi=(x\varphi)(y\varphi)$．因而 φ 是同构．

5　树 E 上齐次 Clifford 半群扩张成 E 上完整逆半群

设 E 是树，$C=[E,G_i,\varphi_i]$ 是 E 上齐次 Clifford 半群，$E_i=\{a\in E\mid h(a)=i\}$．

令 $D_i=\{(a,g,b)\mid a,b\in E_i,g\in G_i\}$，$S=\bigcup\limits_{i\geqslant 0}D_i$．在 S 中规定运算如下：设 $x=(a,g,b)\in D_i$，$y=(c,h,d)\in D_j$，令 $xy=(e,u,f)$，其中 $(e,f)=(a,b)(c,d)$（在 T_E 中运算），$u=(g\varphi_{it})(h\varphi_{jt})$，$t=h(e)$．

(1) 验证结合律成立．设 $x=(a_1,g_1,b_1)\in D_i$，$y=(a_2,g_2,b_2)\in D_j$，$z=(a_3,g_3,b_3)\in D_k$．注意到各元素的第一个，第三个分量的运算是在 T_E 中进行的，因此结合律成立．因此只须验证中间项的运算适合结合律．如果在 T_E 中 $(a_1,b_1)(a_2,b_2)=(c,d)$，$(a_2,b_2)(a_3,b_3)=(e,f)$，$(c,d)(a_3,b_3)=(u,v)$，则 $(a_1,b_1)(e,f)=(u,v)$．xy 的中间项是 $g=(g_1\varphi_{it})(g_2\varphi_{jt})$，其中 $t=h(c)$．设 $s=h(u)$，则 $(xy)z$ 的中间项 $\overline{g}=(g\varphi_{ts})(g_3\varphi_{ks})=((g_1\varphi_{it})(g_2\varphi_{jt}))\varphi_{ts}(g_3\varphi_{ks})=(g_1\varphi_{it}\varphi_{ts})(g_2\varphi_{jt}\varphi_{ts})(g_3\varphi_{ks})$．另一方面，$yz$ 的中间项 $h=(g_2\varphi_{kp})(g_3\varphi_{kp})$ $(p=h(e))$，因而 $x(yz)$ 的中间项是：$\overline{h}=(g_1\varphi_{is})(h\varphi_{ps})=(g_1\varphi_{is})((g_2\varphi_{jp})(g_3\varphi_{kp}))\varphi_{ps}=(g_1\varphi_{is})(g_2\varphi_{js})(g_3\varphi_{ks})$．因为 $\overline{g}=\overline{h}$，因此结合律成立．因而 S 是半群．

(2) 设 $x=(a,g,b)\in D_i$，令 $y=(b,g^{-1},a)$，则 $xyx=(a,g,b)=x$，故 x 是正则元，因而 S 是正则半群．

(3) 设 $x=(a,g,b)\in D_i$，若 $x^2=x$，设 $x^2=(c,(g\varphi_{it})(g\varphi_{it}),d)$，其中 $t=h(c)$，因而 $a=c$，$b=d$．因为 $h(c)=h(ab)$，因而 $a\leqslant b$．又因为 $h(d)=h(ab)$，故 $b\leqslant a$，因此 $a=b$．此时 $t=i$，因而 $g^2=g$，故 $g=e_i$．另一方面，$(a,e_i,a)(a\in E_i)$ 显然是幂等元，故 S 的幂等元集，$\overline{E}=\{(a,e_i,a)\mid a\in E_i\}$．下面证明映射 $(a,e_i,a)\to a$ 是 $\overline{E}$ 到 E 上的同构映射．设 $a\in E_i,b\in E_j$，则在 T_E 中 $(a,a)(b,b)=(ab,ab)$，设 $ab\in E_i$，则 $(a,e_i,a)(b,e_j,b)=(ab,(e_i\varphi_{it})(e_j\varphi_{jt}),ab)=(ab,e_t,ab)$．因此 $\overline{E}$ 和 E 同构．故 E

是半格, 因而 S 是逆半群.

(4) 设 $x=(a,g,b)\in S$, 令 $x\varphi=(a,b)$, 不难看出 φ 是 S 到 T_E 的同态满射. 对于 S 的幂等元 (a,e_i,a) 和 (b,e_j,b), 当 $(a,e_i,a)\varphi=(b,e_j,b)\varphi$, 必有 $a=b$. 因而同态核 $\rho=Ker\varphi$ 是幂等元分离同余, 因而 S 是 E 上完整逆半群.

(5) 设 $x=(a,g,b)\in C_s$, 则对任意幂等元 $(c,e_j,c)(c\in E_j)$ 都有 $(a,g,b)(c,e_j,c)=(c,e_j,c)(a,g,b)$, 因而在 T_E 中有 $(a,b)(c,c)=(c,c)(a,b)$. 取 $c=b$, 则 $(a,b)(b,b)=(b,b)(a,b)$. 因而 $(a,b)=(e,f)$, 这里 $e\leqslant b$, 因而 $a\leqslant b$. 再取 $c=a$, 可得 $b\leqslant a$, 因而 $a=b$. 反之, 设 $x=(a,g,a)(a\in E_i, g\in G_i)$, 则必有 $(a,g,a)(c,e_j,c)=(c,e_j,c)(a,g,a)$, 故 $x\in C_s$. 因而证明了 $C_s=\{(a,g,a)|a\in E_i, g\in G_i, i\geqslant 0\}$. 对于每一个 $a\in E(h(a)=i)$, C_s 的子半群 $\{(a,g,a)|g\in G_i\}$ 和 G_i 同构. 因而 C_s 和 C 有一一对应的关系. 根据 C_s 和 C 的运算规则可知 C_s 和 C 同构. 因此证明了下述定理.

定理5 1 设 C 是树 E 上齐次 Clifford 半群, 则必有 E 上完整逆半群 S 使得 C_s 和 C 同构.

例 设 $E=\{0,e,f\}$ 是半格, 其中 0 是零元, $ef=0$. 由 E 得到的 Munn 半群 T 有两个 类: 零 类 $\{0\}$, 非零 类 $=\{\alpha_{ee},\alpha_{ef},\alpha_{fe},\alpha_{ff}\}$, 其中 α_{ij} 表示子半格 $\{0, i\}$ 到 $\{0, j\}$ 的唯一同构. T 共有 5 个元素. 又设 C 是由群 G_0, G_e, G_f 组成的 Clifford 半群, C 的幂等元半格仍是 E, 群 G_e 和 G_f 都和一个群 G 同构. 根据 Clifford 半群 C 由本文得到的逆半群有两个 类: 零 类 $H_0=\{(0, x, 0)|x\in G_0\}$ 和 G_0 同构. 非零 类有 4 个 类, H_{ee}, H_{ef}, H_{fe}, H_{ff}, 其中 $H_{ij}=\{(i,g,j)|g\in G\}$, H_{ee}, H_{ff} 和 G_e, G_f 同构. 逆半群 S 的 C-核和 C 同构. 从这个简单的例子可以看出, 借助半格 E 上的一个 Clifford 半群的扩张而得到的逆半群比起 E 上的 Munn 半群内容丰富得多.

参 考 文 献

1 Munn WD. Fundamental inverse semigroups. Quarterly Journal of Math Oxford, 1970, 21(2): 157—170

2 Howie JM. Fundamentals of Semigroups Theory, Oxford: Clarendon Press, 1995

3 Petrich M. Inverse Semigroups. New York: John Wiley, 1984

4 Jones PR, Margolis SW, Meakin J, et al. Free product of inverse semigroups Ⅱ. Glasgow Math Journal, 1991, 33: 373—387

5 Lallement G. Semigroups and Combinatorial Applications. New York: John Wiley & Sons, 1979

6 Deko V. HNN extensions of semigroups. Semigroups Forum, 1994, 49: 83—87

7 Lipscomb SL. Centralizers in symmetric inverse semigroups: Structure and order. Semigroups Forum, 1992, 44: 347—355